Να αποδειχθεί ότι $L_0(x)+L_1(x)+\dots+L_n(x)=1$ όπου $L_i(x)$ πολυώνυμο Lagrange ως προς τα $x_0,\dots,x_n$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=1$. Το άθροισμα $L_0(x)+L_1(x)+\dots+L_n(x)=p(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange της $f(x)=1$

Η $f\in\mathbb{P}_0\subseteq\mathbb{P}_n$, λόγω μοναδικότητας του πολυων. παρεμβολής έχουμε ότι $p(x)=f(x)=1$

Να αποδειχθεί ότι:

$x_0^k L_0(x)+x_1^k L_1(x)+\dots+x_n^k L_n(x)=x^k \quad , k\leq n$

Απόδειξη

Θεωρώ την $f(x)=x^k\in\mathbb{P}_k\subseteq\mathbb{P}_n$. Η f θα ταυτίζεται με το πολυώνυμο παρεμβολής p τ. Lagrange

Το πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Lagrange είναι εύκολο να μελετηθεί θεωρητικά.
Υπολογιστικά, αν υπολογίσαμε το $P_{n-1}(x)$ στα σημεία $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$ και θέλαμε να προσθέσουμε το x_n και να βρούμε το x_n και να βρούμε το $P_n(x)$ πρέπει να υπολογίσουμε απ' την αρχή το $P_n(x)$

<u>Πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Νεύτωνα</u>

Έστω $x_0,x_1,\dots,x_n$ διαφορετικά σημεία μεταξύ τους και οι τιμές της $f\in C[\alpha,\beta]$, $y_0,y_1,\dots,y_n$

Γράφουμε το πολυώνυμο παρεμβολής ως:

$P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$

$P(x_0)=a_0=y_0$

$P(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)=y_1 \Leftrightarrow a_1=\frac{y_1-a_0}{x_1-x_0}$

$P(x_2)=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=y_2 \Leftrightarrow a_2=\left(\frac{y_2-a_0}{x_2-x_0}-a_1\right)/(x_2-x_1)$

Αναδρομικά υπολογίζονται τα a_i

Αν $P_{n-1}(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Νεύτωνα στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ και θέλουμε να προσθέσουμε το σημείο x_n τότε:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

Διαιρεμένες Διαφορές

Έστω $x_0, x_1, \dots, x_n$ διαφορετικά μεταξύ τους και $f \in C[a,b]$.

Ορίζουμε αναδρομικά ως προς i.

$\Delta^0(x_0)(f) = f(x_0)$: Διαιρεμένη διαφορά μηδενικής τάξης

$$\Delta^i(x_0, x_1, \dots, x_i)(f) = \frac{\Delta^{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0, x_1, \dots, x_{i-1})(f)}{x_i - x_0} :$$

Διαιρεμένη διαφορά τάξης i

$$\Delta^0(x_0)(f) = f(x_0)$$

$$\Delta^1(x_0, x_1)(f) = \frac{\Delta^0(x_1)(f) - \Delta^0(x_0, x_1)(f)}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} - \frac{f(x_1)}{x_2-x_0}\left(\frac{1}{x_2-x_1} + \frac{1}{x_1-x_0}\right) + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)\cancel{(x_2-x_0)}}{\cancel{(x_2-x_0)}(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι: $\Delta^i(x_0, x_1, \dots, x_i)(f) = \sum_{k=0}^{i} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0, j\neq k} (x_k - x_j)}$

Υπολογισμός Διαιρεμένων Διαφορών

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$\dots$
x_0	$\Delta^0(x_0)(f)$				
x_1	$\Delta^0(x_1)(f)$	$\Delta^1(x_0,x_1)(f)$			
x_2	$\Delta^0(x_2)(f)$	$\Delta^1(x_1,x_2)(f)$	$\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)$		
x_3	$\Delta^0(x_3)(f)$	$\Delta^1(x_2,x_3)(f)$	$\Delta^2(x_1,x_2,x_3)(f)$	$\Delta^3(x_0,x_1,x_2,x_3)(f)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Πρόταση

Έστω $x_0, x_1, \dots, x_n \in [\alpha,\beta]$, $f \in C[\alpha,\beta]$, $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$.
Συμβολίζουμε με $P(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}; x)$ ως το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}$.
Οι συντελεστές a_i του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Νεύτωνα, στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$ δίνονται ως:
$a_i = \Delta^i(x_0, x_1, x_2, \dots, x_i)$ δηλαδή:
$P(x_0, \dots, x_n; x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0, x_1)(f)(x-x_0) + \dots + \Delta^n(x_0, \dots, x_n)(f)(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$

Απόδειξη (Με τέλεια επαγωγή)

Για $n=0$: $P(x_0, x) = f(x_0) = \Delta^0(x_0)(f)$ ισχύει.

Υποθέτω ότι ο τύπος ισχύει για $n-1$:
$P(x_0, \dots, x_{n-1}; x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0, x_1)(f)(x-x_0) + \dots + \Delta^{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})(x-x_0)\dots(x-x_{n-2})$

Θα αποδείξω τον τύπο για n:

(*) $P(x_0, \dots, x_n; x) = P(x_0, \dots, x_{n-1}; x) + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$

Στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ έχουμε:
$P(x_0, \dots, x_n, x_i) = f(x_i) = P(x_0, \dots, x_{n-1}, x_i)$, $i=0,1,\dots,n-1$

Επομένως τα x_i, $i=0,1,\dots,n-1$ είναι ρίζες του πολυωνύμου
$P(x_0, \dots, x_n; x) - P(x_0, \dots, x_{n-1}; x)$

Αποδείξαμε την ισχύ της σχέσης με a_n σταθερό.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $a_n = \Delta^n(x_0, x_1, \dots, x_n)(f)$

$P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; x) = \Delta^{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})x^{n-1} + r(x)$, $r \in \mathbb{P}_{n-2}$
$P(x_1, x_2, \dots, x_n; x) = \Delta^{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)x^{n-1} + S(x)$, $S \in \mathbb{P}_{n-2}$

Το πολυώνυμο $P(x_0, x_1, \dots, x_n; x)$ δίνεται ως:

$$P(x_0, x_1, \dots, x_n; x) = \frac{(x-x_0)P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; x)}{x_n - x_0}$$

για $i=0$: $P(x_0, x_1, \dots, x_n; x_0) = \dfrac{(x_0-x_n)P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; x_0)}{x_n - x_0} = P(x_0, \dots, x_{n-1}; x) = f(x_0)$

για $i=1,2,\dots,n-1$: $P(x_0, x_1, \dots, x_n; x_i) = \dfrac{(x_i-x_0)P(x_1, \dots, x_n; x_i) - (x_i - x_n)P(x_0, \dots, x_{n-1}; x_i)}{x_n - x_0}$
$= \dfrac{(x_i-x_0)f(x_i) - (x_i-x_n)f(x_i)}{x_n - x_0} = f(x_i)$

για $i=n$: $P(x_0, x_1, \dots, x_n; x_n) = \dfrac{(x_n - x_0)P(x_1, x_2, \dots, x_n; x_n)}{x_n - x_0} = f(x_n)$

Ο συντελεστής μεγιστοβάθμιου δίνεται ως :

$$\frac{\Delta^{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_n)(f) - \Delta^{n-1}(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})}{x_n-x_0} = \Delta^{n}(x_0,x_1,\dots,x_n)$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το πολ. παρεμβολής της f να δίνεται από τον πίνακα

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	2	0	0	8

	i=0	1	2	3
-1	2			
0	0	-2		
1	0	0	1	
2	8	8	4	1

$\leftarrow$ (Πίνακες διαιρεμένων διαφορών)

$$P(x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0,x_1)(f)(x-x_0) + \Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)(x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\Delta^3(x_0,x_1,x_2,x_3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) =$$
$$= 2-2(x+1)+1(x+1)x+1(x+1)x(x-1) = x^3+x^2-2x$$